

## ANÁLISE DE OSSOS LONGOS ANISOTRÓPICOS

Lucas Lisbôa Vignoli, [lucaslvig@gmail.com](mailto:lucaslvig@gmail.com)<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>DEPMC - Departamento de Engenharia Mecânica - CEFET/RJ - Av. Maracanã, 229 - Maracanã - RJ - CEP 20271-110 – Brazil

<sup>2</sup>Dep. Eng. Mecânica, Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, R. Marques de São Vicente 225, Gávea, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 22451-900

**RESUMO:** O presente trabalho tem como objetivo mostrar a importância conceitual na descrição de materiais anisotrópicos. Primeiramente será mostrado o erro gerado por descrever a distribuição de tensões de forma similar a utilizada para materiais isotrópicos e depois um modelo analítico será apresentado. Posteriormente será mostrado um modelo de elementos finitos que será utilizado para comparar o resultado com o modelo analítico proposto.

**PALAVRAS-CHAVE:** anisotropia, fêmur

**ABSTRACT:** *The aim of this paper is to show the conceptual importance to describe anisotropic materials. First, the error generate when the stress distribution in anisotropic materials are described similar as isotropic materials and later an analytical model wil be presented. An finite element method will be showed to compare the results and validate the analytical model proposed.*

**KEYWORDS:** *anisotropy, femur*

### INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo enfatizar a importância conceitual na descrição correta do modelo analítico para materiais anisotrópicos (Cowin e Hart, 1990). Tendo como base a análise de tensões em osso longos, como por exemplo, o fêmur, que são materiais anisotrópicos, porosos e que durante toda a sua vida são remodelados.

As equações apresentadas a seguir são baseadas na teoria da elasticidade para materiais não isotrópicos, tendo como base o livro Lekhniskii, 1981. O modelo que será apreseto considera o osso como sendo macroscopicamente contínuo, ou seja, não considera a existência de poros, e como um cilindro de propriedades mecânicas ortotrópicas.

Posteriormente será mostrado um modelo de elementos finitos utilizando o software comercial ANSYS. A limitação dos modelos analíticos que serão apresentados é a não consideração do efeito do cortante.

O modelo do fêmur e as forças que atuam na parte superior do mesmo que será utilizado está ilustrado na Figura 1 e é baseado em Taylor et al, 1996.

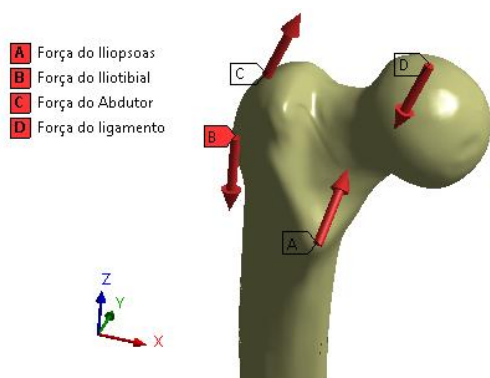


Figura 1. Forças atuantes no fêmur.

### MODELAGEM ANALÍTICA

As fórmulas apresentadas nesse seção não serão completamente deduzidas, pois esse não é o escopo do trabalho, porém as principais equações necessárias para a dedução serão mostradas. Para uma descrição mais detalhada da dedução das fórmulas, ver Lekhniskii, 1981.

O corpo será considerado como cilíndrico, homogêneo e ortotrópico submetido à carga axial, torção e flexão. Esse corpo é então considerado que tem simetria cilíndrica com relação as suas propriedades mecânicas, ou seja, as propriedades são definidas nas direções radial, tangencial e longitudinal.

A condição de equilíbrio estático, a relação constitutiva e compatibilidade geométrica precisam ser respeitadas, como em todos os problemas de elasticidade. Tendo em vista essas condições, as mesmas podem ser escritas, respectivamente, como

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (1)$$

$$e_{jr} = S_{jrlm} \tau_{lm} \quad (2)$$

$$e_{lm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \quad (3)$$

A Eq. (3) é conhecida para grandes deformações como o tensor de Almansi e para pequenas deformações como tensor de Cauchy.

Para um material ortotrópico, a matriz  $S$  é escrita em função das propriedades mecânicas como mostrado na Eq. (4). Os índices 1, 2 e 3 são referentes as direções radiais, tangenciais e longitudinais e para garantir que a matriz seja simétrica, tem-se que  $\frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j}$ , sendo então

necessário a caracterização de nove propriedades para a definição da matriz.

$$S_{jrlm} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Se considerarmos o estado de tensões atuantes em um cilindro ortotrópico carregado por uma força axial  $N$  semelhante a distribuição de tensões para um isotrópico, tem-se

$$\tau_{11} = 0 \quad (5)$$

$$\tau_{22} = 0 \quad (6)$$

$$\tau_{33} = \frac{N}{A} \quad (7)$$

$$\tau_{23} = 0 \quad (8)$$

$$\tau_{13} = 0 \quad (9)$$

$$\tau_{12} = 0 \quad (10)$$

Utilizando as Eqs (2)-(4) com os resultados mostrados nas Eqs (5)-(10), pode-se escrever

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = S_{1133} \frac{N}{A} \quad (11)$$

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_1}{x_1} = S_{2233} \frac{N}{A} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = S_{3333} \frac{N}{A} \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{u_2}{x_1} \right) = 0 \quad (16)$$

Integrando as Eqs (11)-(13), tem-se:

$$u_1 = S_{1133} \frac{N}{A} x_1 + U_1 \quad (17)$$

$$u_2 = (S_{2233} - S_{1133}) \frac{N}{A} x_1 x_2 + U_2 \quad (18)$$

$$u_3 = S_{3333} \frac{N}{A} x_3 + U_3 \quad (19)$$

Onde  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$  são parcelas de movimento de corpo rígido.

Como a aplicação de uma força axial implica uma condição de carregamento axissimétrico do cilindro, assim como a aplicação de um torque e de pressão interna ou externa, o que implica que a distribuição de tensões e deformações e os deslocamentos também precisam ser axissimétricos, ou seja, não podem depender da coordenada tangencial  $x_2$ . Dessa forma, a única condição em que a distribuição de tensões em uma seção de um cilindro ortotrópico é igual a e um corpo similar com propriedades mecânicas caracterizadas como isotrópicas é quando  $S_{2233} - S_{1133}$  é zero, o que pela Eq (4) implica que  $\nu_{32} - \nu_{31}$  é zero, ou seja, o material é transversalmente isotrópico. Um material transversalmente isotrópico é aquela em sua seção transversal as propriedades são iguais em qualquer direção, entretanto suas propriedades longitudinais são diferentes.

Tendo em vista o erro conceitual que se torna evidente após a demonstração anterior, será mostrada a seguir as equações que reproduzem a distribuição das tensões para o mesmo cilindro sob o efeito das cargas axial, flexão e torção.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial(x_2)^2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) e_{11} + x_1 \frac{\partial^2}{\partial(x_1)^2} (x_1 e_{22}) - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 e_{12}) = 0 \quad (20)$$

Tendo como base as Eqs (1)-(4), introduzindo a identidade mostrada na Eq (20), que pode ser verificada por substituição, e utilizando as condições de contorno adequadas para cada carregamento, que não serão mostradas por simplicidade, mas podem encontradas em Lekhniskii, 1981 (as condições de contorno são similares as encontradas em casos de materiais isotrópicos (Timoshenko e Goodier, 1951), porém as funções de tensão são diferentes), pode-se chegar as seguintes distribuições de tensões para os carregamentos axial, torção e flexão em duas direções perpendiculares (Lekhniskii, 1981)

$$\tau_{11}^{axial} = \frac{Nh}{T} \left( 1 - \frac{1-c^{k+1}}{1-c^{2k}} \left( \frac{x_1}{b} \right)^{k-1} - \frac{1-c^{k-1}}{1-c^{2k}} c^{k+1} \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-k-1} \right) \quad (21)$$

$$\tau_{22}^{axial} = \frac{Nh}{T} \left( 1 - \frac{1-c^{k+1}}{1-c^{2k}} k \left( \frac{x_1}{b} \right)^{k-1} + \frac{1-c^{k-1}}{1-c^{2k}} k c^{k+1} \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-k-1} \right) \quad (22)$$

$$\tau_{33}^{axial} = \frac{N}{T} - \frac{Nh}{TS_{3333}} \left( S_{1133} + S_{2233} - \frac{1-c^{k+1}}{1-c^{2k}} (S_{1133} + kS_{2233}) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{k-1} - \frac{1-c^{k-1}}{1-c^{2k}} (S_{1133} - kS_{2233}) c^{k+1} \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-k-1} \right) \quad (23)$$

$$\tau_{23}^{torção} = \frac{M_z}{J} x_1 \quad (24)$$

$$\tau_{11}^{flexão_x} = -\frac{M_x b g}{K} \left[ \left( \frac{x_1}{b} \right) - \left( \frac{1-c^{m+2}}{1-c^{2m}} \right) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{m-1} - \left( \frac{1-c^{m-2}}{1-c^{2m}} \right) c^{m+2} \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-m-1} \right] \sin x_2 \quad (25)$$

$$\tau_{22}^{flexão_x} = -\frac{M_x b g}{K} \left[ 3 \left( \frac{x_1}{b} \right) - \left( \frac{1-c^{m+2}}{1-c^{2m}} \right) (1+m) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{m-1} - \left( \frac{1-c^{m-2}}{1-c^{2m}} \right) c^{m+2} (1-m) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-m-1} \right] \sin x_2 \quad (26)$$

$$\tau_{33}^{flexão_x} = -\frac{M_x}{K} x_1 \sin x_2 + \frac{M_x b g}{KS_{3333}} \left[ (S_{1313} + 3S_{2233}) \left( \frac{x_1}{b} \right) - \left( \frac{1-c^{m+2}}{1-c^{2m}} \right) (S_{1133} + (1+m)S_{2233}) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{m-1} - \left( \frac{1-c^{m-2}}{1-c^{2m}} \right) c^{m+2} (S_{1133} + (1-m)S_{2233}) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-m-1} \right] \sin x_2 \quad (27)$$

$$\tau_{12}^{flexão_x} = \frac{M_x b g}{K} \left[ \left( \frac{x_1}{b} \right) - \left( \frac{1-c^{m+2}}{1-c^{2m}} \right) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{m-1} - \left( \frac{1-c^{m-2}}{1-c^{2m}} \right) c^{m+2} \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-m-1} \right] \cos x_2 \quad (28)$$

$$\tau_{11}^{flexão_y} = \frac{M_y b g}{K} \left[ \left( \frac{x_1}{b} \right) - \left( \frac{1-c^{m+2}}{1-c^{2m}} \right) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{m-1} - \left( \frac{1-c^{m-2}}{1-c^{2m}} \right) c^{m+2} \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-m-1} \right] \cos x_2 \quad (29)$$

$$\tau_{22}^{flexão_y} = \frac{M_y b g}{K} \left[ 3 \left( \frac{x_1}{b} \right) - \left( \frac{1-c^{m+2}}{1-c^{2m}} \right) (1+m) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{m-1} - \left( \frac{1-c^{m-2}}{1-c^{2m}} \right) c^{m+2} (1-m) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-m-1} \right] \cos x_2 \quad (30)$$

$$\tau_{33}^{flexão_y} = \frac{M_y}{K} x_1 \cos x_2 - \frac{M_y b g}{KS_{3333}} \left[ (S_{1313} + 3S_{2233}) \left( \frac{x_1}{b} \right) - \left( \frac{1-c^{m+2}}{1-c^{2m}} \right) (S_{1133} + (1+m)S_{2233}) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{m-1} - \left( \frac{1-c^{m-2}}{1-c^{2m}} \right) c^{m+2} (S_{1133} + (1-m)S_{2233}) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-m-1} \right] \cos x_2 \quad (31)$$

$$\tau_{12}^{flexão_y} = -\frac{M_y b g}{K} \left[ \left( \frac{x_1}{b} \right) - \left( \frac{1-c^{m+2}}{1-c^{2m}} \right) \left( \frac{x_1}{b} \right)^{m-1} - \left( \frac{1-c^{m-2}}{1-c^{2m}} \right) c^{m+2} \left( \frac{x_1}{b} \right)^{-m-1} \right] \sin x_2 \quad (32)$$

Onde  $a$  é o raio interno,  $b$  é o raio externo,  $c = \frac{a}{b}$  e

$$\beta_{ijkl} = S_{ijkl} - \frac{S_{22kl}S_{ij33}}{S_{3333}} \quad (33)$$

$$k = \left( \frac{\beta_{1111}}{\beta_{2222}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

$$h = \frac{S_{2233} - S_{1133}}{\beta_{1111} - \beta_{2222}} \quad (35)$$

$$T = \pi b^2 (1 - c^2) + \frac{2\pi h b^2}{S_{3333}} \left[ \frac{1-c^2}{2} (S_{1133} + S_{2233}) - (1 - c^{k+1})^2 \frac{S_{1133} + kS_{2233}}{k+1} - (1 - c^{k-1})^2 c^2 \frac{S_{1133} - kS_{2233}}{k-1} \right] \quad (36)$$

$$m = \left( 1 + \frac{\beta_{1111} + 2\beta_{1122} + \beta_{6666}}{\beta_{2222}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

$$g = \frac{S_{2233} - S_{1133}}{\beta_{1111} + 2\beta_{1122} + \beta_{6666} - 3\beta_{2222}} \quad (38)$$

$$K = \frac{\pi b^4}{4} (1 - c^4) - \frac{\pi b^4 g}{S_{3333}} \left[ (1 - c^4) \frac{S_{1133} + 3S_{2233}}{4} - \right]$$

$$\frac{(1-c^{m+2})^2}{1-c^{2m}} \left( \frac{S_{1133} + (1+m)S_{2233}}{m+2} \right) - \frac{(1-c^{m-2})^2}{1-c^{2m}} c^4 \left( \frac{S_{1133} + (1-m)S_{2233}}{m-2} \right) \quad (39)$$

Uma vez que as tensões resultantes sob o efeito que cada carregamento são obtidas, as mesmas podem ser somadas pelo princípio da superposição, tendo em vistas que as tensões são consideradas elásticas.

Como é de costume na literatura (Doblaré et al, 2004), os resultados que serão mostrados são as tensões e deformações principais na face externa do osso. Por ser uma face livre e não há pressão, uma das tensões principais é nula e apesar do mesmo não valer para as deformações, só duas tensões principais serão utilizadas pois as mesmas são responsáveis pela inclinação da tensão principal na face. As tensões e deformações principais, assim como o ângulo de inclinação das mesmas, podem ser escritos, com a utilização do círculo de Mohr, como (Crandall et al, 1978)

$$\sigma_{1,3} = \frac{\tau_{33} + \tau_{22}}{2} \pm \left[ \left( \frac{\tau_{33} - \tau_{22}}{2} \right)^2 + (\tau_{23})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

$$\varepsilon_{1,3} = \frac{e_{33} + e_{22}}{2} \pm \left[ \left( \frac{e_{33} - e_{22}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e_{23}}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

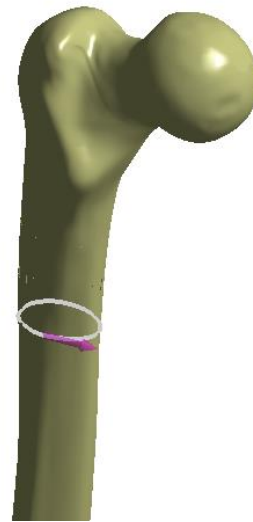
$$\Phi_{tp} = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{2\tau_{23}}{\tau_{33} - \tau_{22}} \right) \quad (42)$$

$$\Phi_{dp} = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{e_{23}}{e_{33} - e_{22}} \right) \quad (43)$$

A notação  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são reservadas para as tensões e deformações principais.

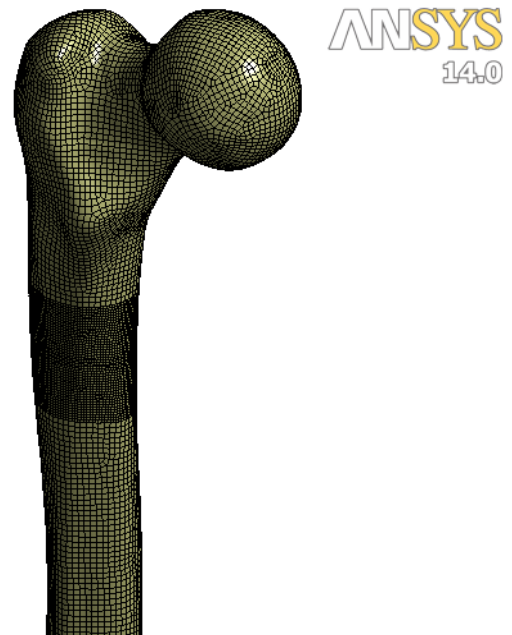
## MODELAGEM NUMÉRICA

A modelagem numérica é baseada no modelo ilustrado na Figura 1 e no artigo de Kenedi, 2014. O fêmur consta apenas de sua parte cortical porque o osso trabecular está presente apenas nas extremidades e como iremos utilizar uma circular, iremos utilizar uma seção da parte medial do fêmur, como mostrado na Figura 2. A seta roxa mostrada na figura indica o sentido que será utilizado para mostrar os resultados obtidos, tanto no caso analítico, quanto no numérico.



**Figura 2.** Path criado para análise dos resultados.

A malha gerada está mostrada na Figura 3. Foram utilizados elementos tetragonais e hexagonais, sendo ambos com nós extras no meio das arestas, ao invés de elementos com nós apenas nas extremidades, com objetivo de enriquecer a descrição da geometria irregular.



**Figura 3.** Malha utilizada na simulação.

As forças foram aplicadas como remotas e como o osso é feito de uma montagem de diversas partes, cada força foi colocada como aplicada na face em que a mesma está atuando. Vale ressaltar que a Figura 1 tem o objetivo apenas de ilustrar o carregamento e que para a convergência do método as forças não são aplicadas em pontos e sim em faces. Para garantir a condição estática, a face inferior foi fixada.

Os valores de forças, distâncias e dimensões aproximadas da seção utilizada são mostrados na Tabela 1.

**Tabela 1:** Dados das forças e dimensões geométricas aproximadas.

Força do ligamento – P <sub>1</sub> (N)	(-1,062; -130; -2,800)
Força do Abductor – P <sub>2</sub> (N)	(430; 0; 1,160)
Força do Iliotibial – P <sub>3</sub> (N)	(0; 0; -1,200)
Força do Iliopsoas – P <sub>4</sub> (N)	(78; 560; 525)
Ponto de aplicação de P <sub>1</sub> (mm)	(50.7; -2.7; 158)
Ponto de aplicação de P <sub>2</sub> (mm)	(-13.5; -6.5; 140)
Ponto de aplicação de P <sub>3</sub> (mm)	(-24.6; -4.2; 108)
Ponto de aplicação de P <sub>4</sub> (mm)	(18.8; -29.3; 83.7)
r <sub>e</sub> (raio externo) (mm)	15.5
r <sub>i</sub> (raio interno) (mm)	7.65

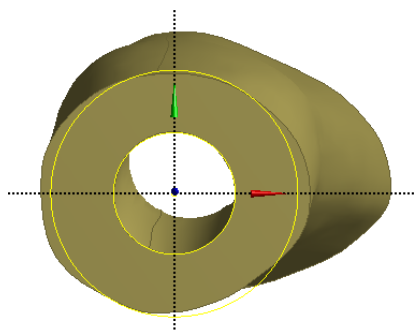
As propriedades mecânicas utilizadas são mostradas na Tabela 2. Para a simulação com elementos finitos, foi utilizado apenas as propriedades ortotrópicas, sendo as propriedades isotrópicas e transversalmente isotrópicas mostradas na tabela utilizadas apenas no modelo analítico.

**Tabela 2:** Propriedades mecânicas.

Propriedades do Material	Isotrópico (Kenedi, 2014)	Transversalmente Isotrópico (Yoon, 1976)	Ortotrópico (Korsa, 2012)
E (GPa)	20	-	-
E <sub>1</sub> (GPa)	-	18.8	12
E <sub>2</sub> (GPa)	-	18.8	13.4
E <sub>3</sub> (GPa)	-	27.4	20
G (GPa)	8.1	-	-
G <sub>12</sub> (GPa)	-	7.17	4.53
G <sub>23</sub> (GPa)	-	8.71	6.23
G <sub>13</sub> (GPa)	-	8.71	3.56
ν	0.3	-	-
ν <sub>12</sub>	-	0.312	0.376
ν <sub>23</sub>	-	0.193	0.234
ν <sub>13</sub>	-	0.193	0.222

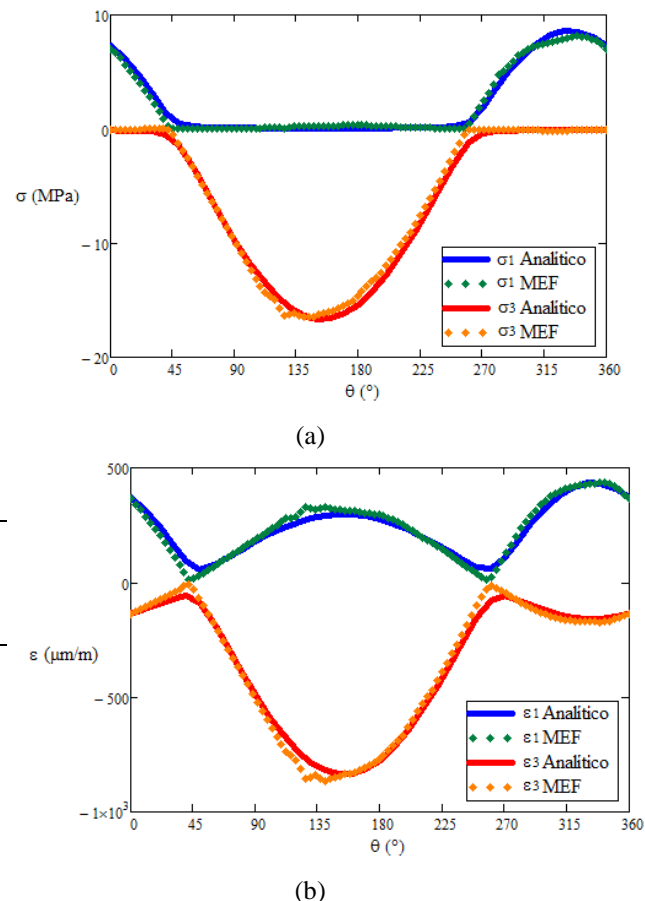
## RESULTADOS

A Figura 4 mostra a vista superior da seção que será utilizada para comparação dos resultados. Como mencionado anteriormente e mostrado na Tabela 1, a seção não é exatamente circular, sendo então as dimensões aproximadas mostradas.



**Figura 4.** Figura da seção real e da seção aproximada do fêmur.

As Figuras 5 mostram a variação das tensões e deformações principais máximas e mínimas de acordo com o ângulo (o ângulo de referência é mostrado na Figura 2).

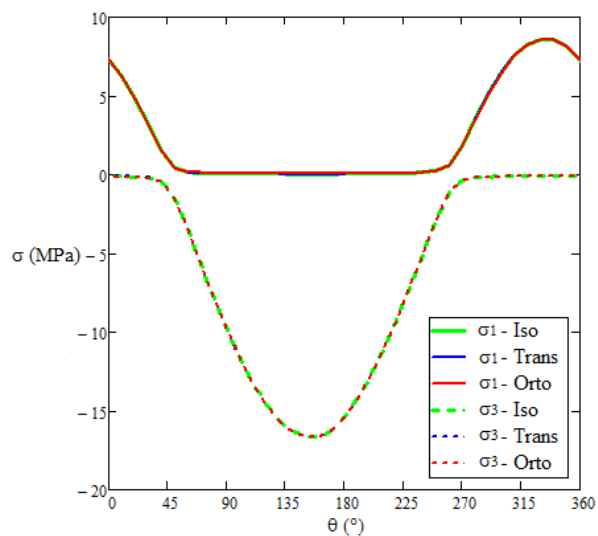


**Figura 5.** (a) tensões principais; (b) deformações principais, no path criado.

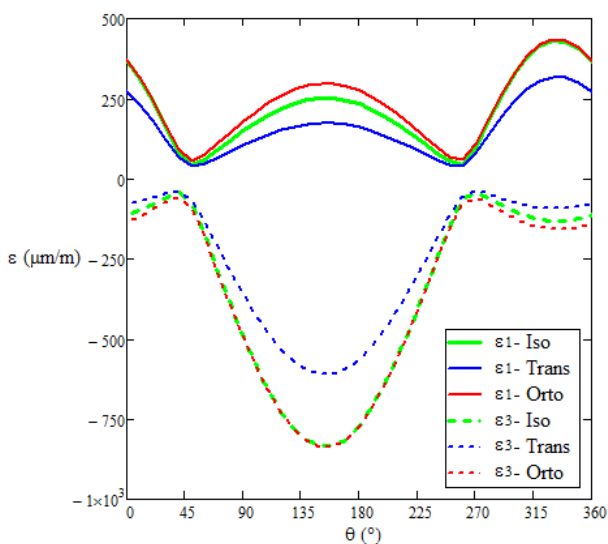
As Figuras 5 mostram uma boa correlação entre os modelos analíticos e numéricos, apesar da não consideração do esforço cortante.

A grande vantagem do modelo analítico, apesar das extensas equações, é a sensibilidade do efeito de cada parâmetro e uma vez que as mesmas sejam implementadas em softwares como MathCAD e MATLAB, o estudo da influência de cada parâmetro se torna uma tarefa muito mais simples do que fazer simulações paramétricas, além do custo computacional. Tendo em vista as considerações anteriores, as propriedades mostradas na Tabela 2 foram utilizadas para a quantificação da influência da anisotropia do material.

Por simplicidade, as propriedades isotrópica, transversalmente isotrópica e ortotrópica serão chamadas de isso, trans e orto nas legendas.



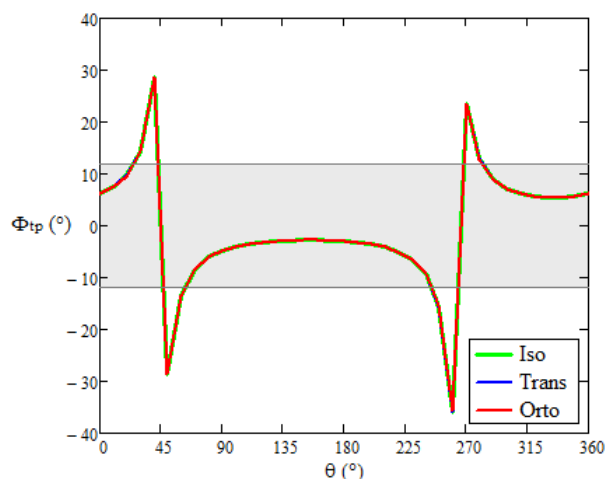
(a)



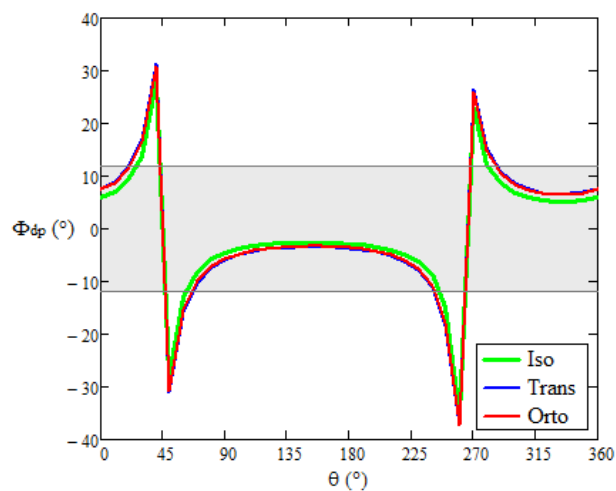
(b)

**Figura 6.** (a) tensões principais; (b) deformações principais, para os modelos isotrópicos (Iso), transversalmente isotrópicos (Trans) e ortotrópicos (Orto).

As Figuras 7 mostram as tensões e deformações principais para os três casos estudados. Pode-se concluir que as tensões não tem uma grande variação, mas as deformações têm. Nesse trabalho as tensões foram calculadas e as deformações foram então obtidas pelas leis constitutivas, entretanto muitas vezes as deformações são medidas experimentalmente e as tensões são calculadas pelas leis constitutivas, o que pode tornar os resultados das tensões completamente diferentes para cada conjunto de propriedades mecânicas.



(a)



(b)

**Figura 7.** Inclinação das (a) tensões principais; (b) deformações principais.

As Figuras 7 mostram as inclinações das tensões (a) e deformações (b) principais. A faixa destacada na região central do gráfico indica a região entre  $-12^\circ$  e  $+12^\circ$ , que de acordo com Petryl, 1996 é a inclinação do crescimento do osso durante o processo de cicatrização.

## CONCLUSÃO

Uma formulação analítica foi mostrada que descreve a análise de tensões em um cilindro ortotrópico sob efeito da força axial e momentos tursor e fletores. A formulação é comparada com um modelo de elementos finitos de um fêmur humano com geometria real. O momento analítico tem como principal vantagem o ganho no estudo de sensibilidade para verificar a importância de cada parâmetro, enquanto o modelo numérico consegue levar o efeito da força cortante através de simulações de elementos finitos. O remodelamento do osso, que muitas vezes é associado as direções principais é considerado de tal

modo a enfatizar que para materiais anisotrópicos a direção entre as tensões principais não coincide com as direções das tensões principais, o que leva a hipótese de que o remodelamento poderia ser justificado pelas deformações principais, tendo em vista que deformações são quantidades físicas ligadas a variação dos deslocamentos enquanto as tensões são quantidades abstratas que relacionam as deformações com as características do material.

## AGRADECIMENTOS

O autor gostaria de agradecer ao professor Paulo Pedro Kenedi pela ajuda e orientação.

## REFERÊNCIAS

- Bergmann, G., Deuretzbacher, G., Heller, M., Graichen, F., Rohlmann, A., Strauss, J. and Duda, G.N., 2001, "Hip contact forces and gait patterns from routine activities", *J. Biomech.*, Vol. 34, pp.859- 871.
- Cowin, S.C. and Hart, R.T., 1990, "Errors in the orientation of the principal stress axes if bone tissue is modeled as isotropic", *J. Biomech.*, Technical Note, Vol. 23, issue 4, pp. 349-352.
- Crandall, S.H., Dahl, N.C. and Lardner, T.J., 1978, "An Introduction to the Mechanics of Solids", Second Edition with SI units, McGraw Hill International Editions.
- Doblaré, M., García J. M. and Gómez, M. J., 2004, "Modeling bone tissue fracture and healing: a review", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, pp. 1809-1840.
- Jones, R.M., 1998, "Mechanics of Composite Materials", Second Edition, Taylor & Francis Editions.
- Kenedi, P.P., Riagusoff, I.I.T., Stress development at human femur by muscle forces, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2014, Published online:04 April 2014.
- Keyak, J. H., Rosi, S.A., 2000, "Prediction of femoral fracture load using finite element models: an examination of stress – and strain-based failure theories", *J. Biomech.*, Vol. 33, pp. 209-214.
- Korsa, R., Mares, T., Numerical Identification of Orthotropic Coefficients of the Lamella of a Bone's Osteon, *Bulletin of Applied Mechanics*, 2012, 8(31), pp. 45-53.
- Krone, R. and Schuster, P., 2006, "An Investigation on the Importance of Material Anisotropy in Finite-Element Modeling of the Human Femur, *SAE International*, 2006-01-0064.
- Lekhniskii, S.G., 1981, "Theory of elasticity of an anisotropic body", Mir.
- Petrtyl, M., Herf, J. and Fiala, P., 1996, "Spatial Organization of the Haversian Bone in Man", *J. Biomech.*, Vol. 29, No. 2, pp. 161-169.
- Taylor, W.R., Roland, E., Ploeg, H., Hertig, D., Klabunde, R., Warner, M.D., Hobato, M.C., Rakotomanana, L. and Clift, S.E., 2002,

"Determination of orthotropic bone elastic constants using FEA and modal analysis", *J. Biomech.*, Vol. 35, pp. 767-773.

- Taylor, M.E., Tanner, K.E., Freeman, M.A.R. and Yettram, A.L., 1996, "Stress and strain distribution within the intact femur: compression or bending?", *Med. Eng. Phys.*, Vol. 18, No. 2, pp. 122-131.
- Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., 1951, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company.
- Yang, H.S., Guo, T.T., Wu, J.H. and Ma X., 2009, "Inhomogeneous material property assignment and orientation definition of transverse isotropy in femur", *JBiSE*, Vol. 2, N° 6, pp. 419-424.
- Yoon, H.S., Katz, J.L., Ultrasonic wave propagation in human cortical bone—II. Measurements of elastic properties and microhardness.

## DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

O autor é o único responsável pelo conteúdo.